CBSE Class 12 Maths Question Paper 2013

Series : SKS/1

कोड नं.
Code No. **65/1/1**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे] | *[अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours] | *[Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं ; **अ**, **ब** तथा **स** । खण्ड **अ** में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड **ब** में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड **स** में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड **अ** में सभी प्रश्नों के उत्तर **एक** शब्द, **एक** वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी **चार** अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा **छः** अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । आवश्यकता पड़ने पर आप लघुगणकीय सारणी माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) *All questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of 29 questions divided into three Sections* ***A, B*** *and* ***C.*** *Section* ***A*** *comprises of* ***10*** *questions of* ***one*** *mark each, Section* ***B*** *comprises of* ***12*** *questions of* ***four*** *marks each and Section C comprises of* ***07*** *questions of* ***six*** *marks each.*

(iii) ***All*** *questions in Section A are to be answered in* ***one*** *word,* ***one*** *sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in* ***04*** *questions of* ***four*** *marks each and* ***02*** *questions of* ***six*** *marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ
SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **10** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **10** carry **1** mark each.

1. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान लिखिए ।

   Write the principal value of $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$ का मान लिखिए ।

   Write the value of $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$.

3. यदि $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ है, तो a का मान ज्ञात कीजिए ।

   Find the value of a if $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

4. यदि $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ है, तो x का मान लिखिए ।

   If $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, then write the value of x.

5. यदि $\begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ है, तो आव्यूह A ज्ञात कीजिए ।

If $\begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, then find the matrix A.

6. अवकल समीकरण $x^3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ की घात लिखिए ।

Write the degree of the differential equation $x^3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$.

7. यदि $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} - z\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - y\hat{j} + \hat{k}$ दो समान सदिश हैं, तो $x + y + z$ का मान लिखिए ।

If $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} - z\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - y\hat{j} + \hat{k}$ are two equal vectors, then write the value of $x + y + z$.

8. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, $\hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ एक न्यूनकोण θ बनाता है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए ।

If a unit vector $\vec{a}$ makes angles $\frac{\pi}{3}$ with $\hat{i}$, $\frac{\pi}{4}$ with $\hat{j}$ and an acute angle θ with $\hat{k}$, then find the value of θ.

9. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (–2, 4, –5) से होकर जाती है और रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समांतर है ।

Find the Cartesian equation of the line which passes through the point (–2, 4, –5) and is parallel to the line $\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{5} = \frac{z+8}{6}$.

10. किसी शहर की वायु में x-डीजल के वाहनों द्वारा जनित प्रदूषण की मात्रा में बढ़ोतरी $P(x) = 0.005x^3 + 0.02x^2 + 30x$ द्वारा प्रदत्त है । 3 डीजल के वाहनों के बढ़ने पर प्रदूषण की बढोतरी का सीमांत मान ज्ञात कीजिए तथा लिखिए कि उपरोक्त प्रश्न कौन सा मूल्य दर्शाता है ।

The amount of pollution content added in air in a city due to x-diesel vehicles is given by $P(x) = 0.005x^3 + 0.02x^2 + 30x$. Find the marginal increase in pollution content when 3 diesel vehicles are added and write which value is indicated in the above question.

खण्ड – ब
SECTION – B

प्रश्न संख्या **11** से **22** तक प्रत्येक प्रश्न के **4** अंक हैं ।

Question numbers **11** to **22** carry **4** marks each.

11. दर्शाइए कि $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ में $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ द्वारा परिभाषित फलन f, एकैकी तथा आच्छादक है । अत: f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

Show that the function f in $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ defined as $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ is one-one and onto. Hence find f^{-1}.

12. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0 \text{ तथा } xy < 1.$$

अथवा

सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

Find the value of the following :

$$\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0 \text{ and } xy < 1.$$

OR

Prove that : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

13. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^3)^2$$

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^3)^2.$$

14. निम्न फलन का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

$$(\log x)^x + x^{\log x}$$

Differentiate the following function with respect to x :

$$(\log x)^x + x^{\log x}$$

15. यदि $y = \log\left[x + \sqrt{x^2 + a^2}\right]$ है, तो दर्शाइए कि $(x^2 + a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$

If $y = \log\left[x + \sqrt{x^2 + a^2}\right]$, show that $(x^2 + a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$.

16. दर्शाइए कि फलन $f(x) = |x - 3|, x \in \mathbb{R}, x = 3$ पर संतत है पर अवकलित नहीं है ।

अथवा

यदि $x = a \sin t$ तथा $y = a(\cos t + \log \tan {}^t/_2)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

Show that the function $f(x) = |x - 3|, x \in \mathbb{R}$, is continuous but not differentiable at $x = 3$.

OR

If $x = a \sin t$ and $y = a(\cos t + \log \tan {}^t/_2)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

17. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\sin(x - a)}{\sin(x + a)}\,dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{5x - 2}{1 + 2x + 3x^2}\,dx$

Evaluate : $\int \frac{\sin(x - a)}{\sin(x + a)}\,dx$

OR

Evaluate : $\int \frac{5x - 2}{1 + 2x + 3x^2}\,dx$

18. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}\,dx$

Evaluate : $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}\,dx$

19. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^4 (|x| + |x - 2| + |x - 4|)\,dx$

Evaluate : $\int_0^4 (|x| + |x - 2| + |x - 4|)\,dx$

20. यदि दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार के हैं कि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$ है, तो सिद्ध कीजिए कि सदिश $2\vec{a} + \vec{b}$ तथा सदिश $\vec{b}$ परस्पर लंबवत हैं ।

If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are two vectors such that $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$, then prove that vector $2\vec{a} + \vec{b}$ is perpendicular to vector $\vec{b}$.

21. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2}$, समतल $x - y + z - 5 = 0$ को प्रतिच्छेद करती है । रेखा तथा समतल के बीच बनने वाला कोण भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा को अंतर्विष्ट करने वाले तथा तल $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ के लंबवत् तल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the coordinates of the point, where the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2}$ intersects the plane $x - y + z - 5 = 0$. Also find the angle between the line and the plane.

OR

Find the vector equation of the plane which contains the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ and which is perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$.

22. A, 60% दशाओं में सत्य बोलता है जबकि B, 90% दशाओं में । एक ही तथ्य को कहने में वह कितनी प्रतिशत दशाओं में परस्पर खण्डन करेंगे ? क्या आप समझते हैं कि परस्पर खण्डन की स्थितियों में B के कथन को अधिक वरीयता दी जाएगी क्योंकि वह A से अधिक स्थितियों में सत्य बोलता है ?

A speaks truth in 60% of the cases, while B in 90% of the cases. In what percent of cases are they likely to contradict each other in stating the same fact ? In the cases of contradiction do you think, the statement of B will carry more weight as he speaks truth in more number of cases than A ?

खण्ड – स
SECTION – C

प्रश्न संख्या **23** से **29** तक प्रत्येक प्रश्न के **6** अंक हैं ।
Question numbers **23** to **29** carry **6** marks each.

23. एक विद्यालय अपने विद्यार्थियों को ईमानदारी, नियमितता तथा कठोर परिश्रम के मूल्यों के आधार पर ₹ 6,000 की कुल नकद राशि द्वारा पुरस्कृत करना चाहता है । मूल्य कठोर परिश्रम की पुरस्कार राशि का तीन गुना ईमानदारी के लिए पुरस्कार राशि में जोड़ने पर ₹ 11,000 बनते हैं । ईमानदारी तथा कठोर परिश्रम के मूल्यों की पुरस्कार राशियों का योग नियमितता के लिए दी गई पुरस्कार राशि का दुगुना है । उपरोक्त परिस्थिति का बीजगणितीय निरूपण कीजिए तथा आव्यूह विधि से प्रत्येक मूल्य के लिए दी गई पुरस्कार राशि ज्ञात कीजिए । उपरोक्त तीन मूल्यों, ईमानदारी, नियमितता तथा कठोर परिश्रम के अतिरिक्त एक अन्य मूल्य सुझाइए, जो आपके विचार में विद्यालय को पुरस्कार देने के लिए शामिल करना चाहिए ।

A school wants to award its students for the values of Honesty, Regularity and Hard work with a total cash award of ₹ 6,000. Three times the award money for Hardwork added to that given for honesty amounts to ₹ 11,000. The award money given for Honesty and Hard work together is double the one given for Regularity. Represent the above situation algebraically and find the award money for each value, using matrix method. Apart from these values, namely, Honesty, Regularity and Hard work, suggest one more value which the school must include for awards.

24. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है । अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

वक्र $x^2 = 4y$ के किसी बिंदु पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2) से हो कर जाता है । इस अभिलंब की संगत स्पर्श रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the height of the cylinder of maximum volume, that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Also find the maximum volume.

OR

Find the equation of the normal at a point on the curve $x^2 = 4y$ which passes through the point (1, 2). Also find the equation of the corresponding tangent.

25. समाकलन के प्रयोग से, वक्र $x^2 = 4y$ एवं रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समाकलन के प्रयोग से, दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area bounded by the curve $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$.

OR

Using integration, find the area of the region enclosed between the two circles $x^2 + y^2 = 4$ and $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

26. दर्शाइए कि अवकल समीकरण $2ye^{x/y}\,dx + (y - 2x\,e^{x/y})\,dy = 0$ समघातीय है । यदि $x = 0$ जब $y = 1$ दिया हुआ है, तो इस अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए ।

Show that the differential equation $2ye^{x/y}\,dx + (y - 2x\,e^{x/y})\,dy = 0$ is homogeneous. Find the particular solution of this differential equation, given that $x = 0$ when $y = 1$.

27. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो उन तीन बिंदुओं से हो कर जाता है जिनके स्थिति सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हैं । यह समतल, रेखा $\vec{r} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है, उसके निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the plane passing through three points with position vectors $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Also find the coordinates of the point of intersection of this plane and the line $\vec{r} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$.

28. किसानों की एक सहकारी समिति के पास दो प्रकार की फसलों A तथा B उगाने के लिए 50 हेक्टेयर भूमि है । फसलों A तथा B से क्रमश: प्रति हेक्टेयर अनुमानित लाभ ₹ 10,500 तथा ₹ 9,000 है । खरपतवार के नियंत्रण के लिए समिति एक तरल शाकनाशी दवा प्रयोग करती है जिसकी मात्रा फसलों A तथा B के लिए क्रमश: 20 लीटर तथा 10 लीटर प्रति हेक्टेयर है । उस तालाब, जो भूमि से जल निकासी करता है, में रहने वाली मछलियों तथा अन्य वन्य जीवन को बचाने के लिए, शाकनाशी का प्रयोग 800 लीटर से अधिक नहीं किया जाना चाहिए । यह मानते हुए कि लाभ कमाने की अपेक्षा मछलियों तथा अन्य वन्य जीवन की रक्षा अधिक आवश्यक है, प्रत्येक फसल के लिए कितनी-कितनी भूमि नियत की जाए कि लाभ अधिकतम हो ? उपरोक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर, आलेख द्वारा हल कीजिए । क्या आप इस संदेश से सहमत हैं कि पर्यावरण संतुलन के लिए वन्य जीवन का संरक्षण अति आवश्यक है ?

A cooperative society of farmers has 50 hectares of land to grow two crops A and B. The profits from crops A and B per hectare are estimated as ₹ 10,500 and ₹ 9,000 respectively. To control weeds, a liquid herbicide has to be used for crops A and B at the rate of 20 litres and 10 litres per hectare, respectively. Further not more than 800 litres of herbicide should be used in order to protect fish and wildlife using a pond which collects drainage from this land. Keeping in mind that the *protection of fish and* other wildlife is more important than earning profit, how much land should be allocated to each crop so as to maximize the total profit ? Form an LPP from the above and solve it graphically. Do you agree with the message that the protection of wildlife is utmost necessary to preserve the balance in environment ?

29. मान लीजिए किसी रोगी को दिल का दौरा पड़ने का संयोग 40% है । यह मानते हुए कि ध्यान और योग विधि दिल का दौरा पड़ने के खतरे को 30% कम कर देती है और दवा द्वारा खतरे को 25% कम किया जा सकता है । किसी भी समय रोगी इन दोनों में से एक विकल्प का चयन समान प्रायिकता से कर सकता है । यह दिया गया है कि उपरोक्त विकल्पों से किसी एक का चुनाव करने वाले रोगियों में से यादृच्छया चुना गया रोगी दिल के दौरे से ग्रसित हो जाता है । रोगी द्वारा ध्यान और योग विधि का उपयोग किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए तथा बताइए कि उपरोक्त विधियों में से रोगी के लिए कौन सी विधि अधिक हितकारी है ।

Assume that the chances of a patient having a heart attack is 40%. Assuming that a meditation and yoga course reduces the risk of heart attack by 30% and prescription of certain drug reduces its chance by 25%. At a time a patient can choose any one of the two options with equal probabilities. It is given that after going through one of the two options, the patient selected at random suffers a heart attack. Find the probability that the patient followed a course of meditation and yoga. Interpret the result and state which of the above stated methods is more beneficial for the patient.